

# מתמטיקה

פרק 25 - טריגונומטריה במרחב - התיבה והקובייה

תוכן העניינים

|    |                        |    |
|----|------------------------|----|
| 1. | הגדרות יסודיות.....    | 1  |
| 2. | תיבה שבסיסה ריבוע..... | 4  |
| 3. | תיבה שבסיסה מלבן.....  | 8  |
| 4. | הקובייה.....           | 13 |

## הגדרות יסודיות:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:



ישר המאונך לכל הישרים במישור העוברים דרך עקבו נקרא אנך למישור. באיור הסמוך הישר ON מאונך לישרים AO , BO , CO שעל המישור.

#### משפט:



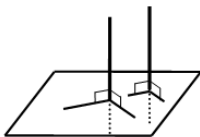
אם ישר מאונך לשני ישרים במישור העוברים דרך עקבו אזי הוא מאונך למישור כולו. באיור הסמוך הישר ON מאונך לישרים AO , CO שעל המישור ולכן מאונך למישור כולו.

#### משפט:

בכל נקודה במישור אפשר להעלות אנך אחד בלבד.

#### משפט:

מנקודה שמחוץ למישור אפשר להוריד אנך אחד בלבד למישור זה.



#### משפט:

שני אנכים למישור אחד הם מקבילים. באיור הסמוך ניתן לראות כי שני אנכים הם מקבילים.

#### הגדרה:



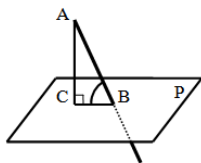
ישר החותך מישור ואינו מאונך למישור זה נקרא משופע למישור. הקטע המחבר את עקב האנך עם עקב המשופע נקרא היטל המשופע על המישור. באיור הסמוך הקטע AC הוא אנך למישור P , AB הוא משופע למישור ו-BC הוא היטל המשופע.

#### הגדרה:

אורך אנך המורד מנקודה שמחוץ למישור אל המישור נקרא מרחק הנקודה מהמישור.

**הגדרה:**

זווית בין ישר ומישור היא הזווית שבין הישר (המשופע) ובין היטלו של הישר על המישור.  
 באיור הסמוך הזווית שבין הישר המשופע  $AB$  לבין המישור  $P$  היא:  $\angle ABC$ .

**הגדרה:**

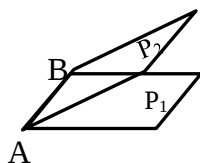
שני מישורים שאינם נחתכים נקראים מישורים מקבילים.

**הגדרה:**

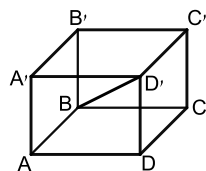
אורך האנך המורד מנקודה שעל פני מישור אחד אל מישור המקביל לו נקרא המרחק בין המישורים.

**הגדרה:**

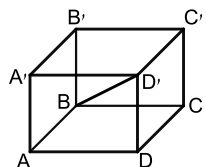
שני מישורים נחתכים יוצרים צורה גיאומטרית הנקראת פינה.  
 ישר החיתוך של שני המישורים נקרא מקצוע, והמישורים היוצרים את הפינה נקראים פאות.  
 באיור הסמוך הקטע  $AB$  הוא ישר החיתוך של שני המישורים  $P_1$  ו- $P_2$  הנקרא מקצוע.  
 הצורות הסגורות של המישורים נקראות פאות וכל הצורה נקראת פינה.

**שאלות:**

- (1) במנסרה  $ABCA'B'C'$  שבסיסה משולש שווה שוקיים ( $AB = AC$ ) הנקודה  $D$  היא אמצע המקצוע  $BC$ .  
 סמן את הזווית בין הישר  $A'D$  לבין הבסיס  $ABC$ .



- (2) נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$ .  
 סמן את הזווית בין האלכסון  $BD'$  לבין הבסיס  $ABCD$ .



- (3) נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$  (ראה איור).  
 סמן את הזווית בין האלכסון  $AC'$  לבין הפאה  $D'C'D$ .



(4) נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$ . סמן את הזוויות בין :

א. האלכסון  $B'D$  לבין הפאה  $B'C'CB$ .

ב. האלכסון  $B'D$  לבין הפאה  $D'C'CD$ .



(5)  $SABCD$  היא פירמידה ישרה שבסיסה מלבן (ראה איור). סמן את הזווית בין המקצוע  $SB$  לבין הבסיס  $ABCD$ .



(6)  $SABC$  היא פירמידה ישרה שבסיסה משולש שווה שוקיים ( $AB = AC$ ).

סמן את הזווית בין המקצוע  $SA$  לבין הבסיס  $ABC$ .

### תשובות סופיות:

(1)  $\angle A'DA$

(2)  $\angle D'BD$

(3)  $\angle AC'D$

(4) א.  $\angle DB'C$  . ב.  $\angle B'DC'$

(5)  $\angle SBE$

(6)  $\angle SAO$

## תיבה שבסיסה ריבוע:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

גוף מרחבי הבנוי משני מלבנים זהים מקבילים במרחב ( $ABCD$  ו- $A'B'C'D'$ ) הקרויים בסיסי התיבה. כל מקצוע צדדי ( $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ ) נקרא גובה התיבה. המקצועות הצדדיים שווים זה לזה ומאונכים למישורי הבסיס של התיבה.



#### נוסחאות:

| הנוסחה                  | תיאור מילולי    |
|-------------------------|-----------------|
| $S = a \cdot b$         | שטח בסיס התיבה  |
| $V = a \cdot b \cdot h$ | נפח התיבה       |
| $M = 2h(a + b)$         | שטח מעטפת התיבה |
| $P = 2h(a + b) + 2ab$   | שטח פנים        |

- תיבה שבסיסה ריבוע: תיבה שבסיסה הם ריבועים. מתקיים:  $a = b$  בכל הנוסחאות.
- קובייה: אם בסיסי התיבה הם ריבועים וגובה התיבה שווה לאורך מקצוע הבסיס, דהיינו:  $a = b = h$  אזי התיבה נקראת קובייה.

## שאלות:



- (1) בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  שבסיסה ריבוע, אורך אלכסון הבסיס  $AC$  הוא  $15.2$  ס"מ. אורך המקצוע הצדדי  $AA'$  הוא  $10$  ס"מ.
- חשב אורך מקצוע הבסיס.
  - חשב נפח התיבה ושטח הפנים.
  - חשב את  $BC'$ , אלכסון הפאה  $BB'C'C$ , ואת אלכסון התיבה  $AC'$ .
  - חשב את זווית  $\angle AC'B$ , שבין האלכסון  $BC'$  בפאה  $BB'C'C$  לבין אלכסון התיבה  $AC'$ .



- (2) נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$  שבסיסה ריבוע. אורך האלכסון  $AD'$  של הפאה הצדדית  $ADD'A'$  הוא  $16.8$  ס"מ. הזווית שנוצרת בין שני האלכסונים  $AD'$  ו- $AB'$  היא  $58^\circ$ .
- חשב את אורך אלכסון הבסיס,  $B'D'$ .
  - חשב את אורך מקצוע הבסיס  $AB$ .
  - חשב את גובה התיבה  $AA'$ .
  - חשב את נפח התיבה.



- (3) נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$  שבסיסה ריבוע. אורך אלכסון הבסיס  $BD$  הוא  $16$  ס"מ ונפח התיבה הוא  $1408$  סמ"ק. חשב:
- גובה התיבה  $DD'$ .
  - הזווית שבין אלכסון התיבה  $BD'$  לבסיס  $ABCD$ .
  - אורך מקצוע הבסיס  $AB$ .



- (4) בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$ , שבסיסה  $ABCD$  הוא ריבוע. אורך האלכסון של הפאה הצדדית הוא  $10$  ס"מ. הזווית שבין אלכסוני הפאות הצדדיות היא  $48^\circ$ .
- חשב את אורך האלכסון של הבסיס העליון  $B'D'$ .
  - חשב את שטח הבסיס של התיבה.



- (5) בתיבה ריבועית  $ABCD A'B'C'D'$  מעבירים את האלכסונים  $B'D'$  ו- $A'C'$  במישור הבסיס העליון. האלכסונים נפגשים בנקודה  $O$  כך שנוצר המשולש  $BOD$ . נתון כי:  $\angle BOD = 23^\circ$  וכי אורך מקצוע הבסיס של התיבה הוא 6 ס"מ.
- א. חשב את היקף המשולש  $BOD$ .
- ב. חשב את הזווית שנוצרת בין הצלע  $OD$  של המשולש  $BOD$  ומישור הפאה  $AA'D'D$ .



- (6) בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  שבסיסה ריבוע מעבירים את האלכסונים  $AC'$  ו- $B'D'$ . האלכסונים נחתכים בנקודה  $O$  שבתוך התיבה. מהנקודה  $O$  מעבירים את הקטע  $OE$  כך ש- $E$  היא אמצע המקצוע  $AD$ . ידוע כי אורך מקצוע הבסיס של התיבה הוא 8 ס"מ ואורך אלכסון התיבה הוא 12 ס"מ.
- א. מצא את אורך גובה התיבה.
- ב. מצא את אורך הקטע  $OE$ .



- (7) בתיבה ריבועית וישרה  $ABCD A'B'C'D'$  מסמנים את אורך הגובה ב- $h$ . מעבירים את הקטעים  $AB'$ ,  $AC$  ו- $B'C$  כך שנוצר המשולש  $AB'C$  כמתואר באיור. הזווית הנוצרת בין אנך לצלע  $AC$  במשולש  $AB'C$  ומישור הבסיס  $ABCD$  היא  $\alpha$ .
- א. הבע באמצעות  $h$  ו- $\alpha$  את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.
- ב. הבע באמצעות  $h$  ו- $\alpha$  את נפח התיבה.



- (8) בתיבה הריבועית  $ABCD A'B'C'D'$  שלפניך מעבירים את אלכסון הבסיס העליון  $B'D'$ . הנקודות  $E$  ו- $F$  נמצאות על אמצעי המקצועות  $A'B'$  ו- $B'C'$  כך שהקטע  $EF$  חותך את האלכסון  $B'D'$  בנקודה  $O$ . מקצים נקודה נוספת  $G$  - הנמצאת על הגובה  $DD'$  כך ש:  $DG = a$ . מעבירים את הקטעים  $GO$  ו- $DO$  כך שנוצר המשולש  $DOG$ . אורך מקצוע הבסיס הוא  $k$  וגובה התיבה הוא  $h$ .
- א. הבע באמצעות  $k$  ו- $a$  את שטח המשולש  $DOG$ .
- ב. מצא את היחס:  $\frac{a}{h} : S_{DOG} = S_{DOG}$ . עבורו מתקיים.

- (9) בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  הבסיס  $ABCD$  הוא ריבוע. גובה התיבה הוא  $h$ . נתון:  $\angle ADC' = \beta$ .

א. הראה כי אורך הצלע בבסיס התיבה הוא:  $\frac{\sqrt{2}h \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\beta\right)}{\sqrt{\cos \beta}}$ .

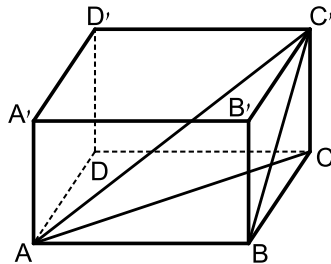
ב. לאלו ערכים של  $\beta$  יש פתרון לבעיה?

### תשובות סופיות:

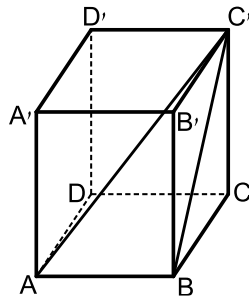
- (1) א.  $10.748$  ס"מ. ב.  $1155.2$  סמ"ק  $V$ ,  $660.959$  סמ"ר  $S$ .  
ג.  $14.68$  ס"מ,  $18.19$  ס"מ. ד.  $\angle AC'B = 36.21^\circ$ .
- (2) א.  $16.29$  ס"מ. ב.  $11.518$  ס"מ. ג.  $12.23$  ס"מ.  
ד.  $1622.485$  סמ"ק  $V$ .
- (3) א.  $11$  ס"מ. ב.  $34.51^\circ$ . ג.  $11.313$  ס"מ.
- (4) א.  $8.13$  ס"מ. ב.  $33.09$  סמ"ר.
- (5) א.  $51$  ס"מ. ב.  $8.1^\circ$ .
- (6) א.  $4$  ס"מ. ב.  $4.47$  ס"מ.
- (7) א.  $\frac{h\sqrt{2}}{\tan \alpha}$ . ב.  $\frac{2h^3}{\tan^2 \alpha}$ .
- (8) א.  $S_{\text{DOG}} = \frac{3ka}{4\sqrt{2}}$ . ב.  $\frac{a}{h} = \frac{1}{2}$ .
- (9) א.  $0^\circ < \beta < 90^\circ$ .

## תיבה שבסיסה מלבן:

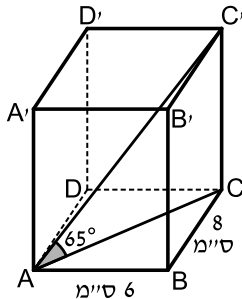
### שאלות:



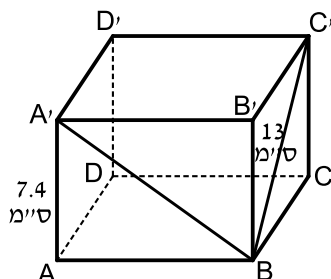
- 10) בתיבה שלפניך אורכי צלעות הבסיס הם:  
 $AB = 12$  ס"מ,  $BC = 5$  ס"מ. הזווית בין  $BC'$  אלכסון הפאה,  $BB'C'C$ , לבסיס  $ABCD$  היא  $40^\circ$ .  
 א. חשב את גובה התיבה  $CC'$ .  
 ב. חשב את אורך אלכסון הבסיס,  $AC$ .  
 ג. חשב את הזווית בין אלכסון התיבה  $AC'$  לבסיס  $ABCD$ .  
 ד. חשב את אורך אלכסון התיבה  $AC'$ .  
 ה. חשב את נפח התיבה.  
 ו. חשב את שטח מעטפת התיבה.



- 11) נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$ .  
 אורך צלע הבסיס:  $AB = 9$  ס"מ.  
 אלכסון הפאה  $BB'C'C$  הוא:  $BC' = 15$  ס"מ.  
 חשב את הזווית בין  $BC'$  אלכסון הפאה  $BB'C'C$ , לאלכסון התיבה  $AC'$ .



- 12) נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$ , בה מתקיים:  
 $AB = 6$  ס"מ,  $AD = 8$  ס"מ. הזווית בין אלכסון התיבה  $AC'$  לבסיס  $ABCD$  היא  $65^\circ$ .  
 א. חשב את גובה התיבה  $CC'$ .  
 ב. חשב את נפח התיבה ושטח הפנים שלה.



- 13) נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$  שבסיסה מלבן. גובה התיבה  $AA'$  הוא 7.4 ס"מ.  
 אורך אלכסון הפאה  $BC' = 13$  ס"מ.  
 הזווית בין אלכסון הפאה  $A'B$  לבסיס  $ABCD$  היא  $37^\circ$ .  
 א. חשב את אורכי צלעות הבסיס.  
 ב. חשב את שטח המעטפת ושטח הפנים של התיבה.



14) בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  נתון :

$$AA' = 10 \text{ ס"מ}, AB = 8 \text{ ס"מ}, BC = 6.2 \text{ ס"מ}$$

חשב את :

א. אלכסון הבסיס,  $AC$ , אלכסון הפאה,  $AD'$ , ואלכסון התיבה,  $AC'$ .

ב. הזווית בין  $AD'$ , אלכסון הפאה  $ADD'A'$ ,

לאלכסון התיבה  $AC'$  :  $\angle D'AC'$ .

ג. נפח התיבה ושטח המעטפת.



15) נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$ .  $AB = 12 \text{ ס"מ}$ .

אורך אלכסון הבסיס  $BD$  הוא 15 ס"מ.

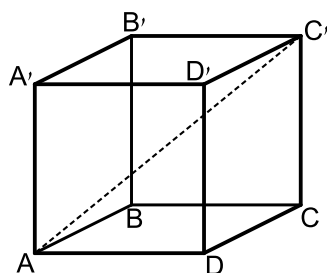
נפח התיבה הוא 864 סמ"ק.

חשב את :

א. רוחב הבסיס של התיבה,  $BC$ .

ב. גובה התיבה,  $AA'$ .

ג. הזווית בין אלכסון התיבה  $BD'$  לבסיסה  $ABCD$ .



16) בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  (ראה ציור), נתון :

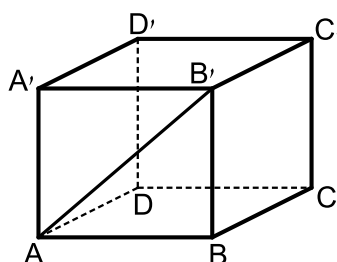
$$CC' = 14 \text{ ס"מ}, DC = 8 \text{ ס"מ}, AD = 12 \text{ ס"מ}$$

א. חשב את האורך של אלכסון הבסיס,  $AC$ .

ב. חשב את הזווית שבין אלכסון התיבה  $AC'$  לבין הבסיס  $ABCD$ .

ג. חשב את שטח המעטפת של התיבה.

ד. חשב את שטח הפנים של התיבה.



17) בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  (ראה ציור) נתון :

$$AD = 10 \text{ ס"מ}, AB = 12 \text{ ס"מ}$$

הזווית שבין אלכסון הפאה  $AB'$  לבין

הבסיס  $ABCD$  היא  $35^\circ$ .

א. חשב את גובה התיבה  $BB'$ .

ב. חשב את  $AD'$ , אלכסון הפאה  $ADD'A'$ .

ג. חשב את הזווית שבין  $AD'$  לבין הבסיס  $ABCD$ .



**(18)** נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$  שבסיסה מלבן (ראה ציור).

אורך גובה התיבה  $AA'$  הוא 10 ס"מ.

אורך  $AB'$ , אלכסון הפאה  $ABB'A'$  הוא 14 ס"מ.

א. חשב את אורך המקצוע  $AB$ .

הזווית שבין  $AD'$ , אלכסון הפאה  $ADD'A'$ ,

לבין הבסיס  $ABCD$  היא בת  $40^\circ$ .

ב. חשב את נפח התיבה.

ג. חשב את שטח מעטפת התיבה.



**(19)** נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$  שבה

10 ס"מ  $AB =$ , 12 ס"מ  $AD =$  (ראה ציור).

הזווית שבין אלכסון התיבה,  $AC'$ ,

לבין הבסיס  $ABCD$  היא בת  $38^\circ$ .

א. חשב את אלכסון הבסיס.

ב. חשב את גובה התיבה.

ג. חשב את שטח פני התיבה.



**(20)** נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$  (ראו סרטוט)

שבה: 10 ס"מ  $AB =$ , 12 ס"מ  $AD =$ , 8 ס"מ  $AA' =$ .

א. חשב את אורך  $A'D'$ , אלכסון הפאה  $ADD'A'$ .

ב. חשב את אורך האלכסון של התיבה  $B'D'$ .



**(21)** בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  נתון:

7 ס"מ  $AA' =$ , 12 ס"מ  $AD =$ , 8 ס"מ  $AB =$ .

חשב את אורך האלכסון  $BD'$  ואת הזווית

בינו לבין בסיס התיבה.



**(22)** נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$  שבסיסה מלבן.

מעבירים את האלכסונים  $BD$  ו- $BD'$  כך

שמתקיים:  $\angle DBD' = \angle ABD = \alpha$ .

אורך האלכסון  $BD$  יסומן ב- $a$ .

א. הבע באמצעות  $a$  ו- $\alpha$  את:

i. אורך התיבה  $AB$ .

ii. רוחב התיבה  $AD$ .

iii. גובה התיבה  $AA'$ .

ב. מצא את  $\alpha$  אם ידוע כי נפח התיבה הוא  $0.64a^3$ .



**(23)** בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  שבסיסה מלבן מעבירים את האלכסון  $B'D'$  בבסיס העליון. מאמצע האלכסון  $M$  מעבירים את הקטעים  $DM$  ו- $BM$  כך שנוצר המשולש ישר הזווית  $BMD$  ( $\angle BMD = 90^\circ$ ). אורך מקצוע הבסיס  $AB$  הוא  $5a$  ואורך הקטע  $DM$  הוא  $4a$ .

- א. הבע באמצעות  $a$  את אורך המקצוע  $AD$ .
- ב. מעבירים את הקטע  $AM$ . חשב את זווית  $MAD$ .
- ג. מצא את  $a$  אם ידוע כי שטח המשולש  $MAD$  הוא  $125$  סמ"ר (עגל למספר שלם).

**(24)** בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  נתון:  $BD' = m$ . הזווית שבין האלכסון  $BD'$  לבסיס  $ABCD$  היא  $\alpha$  והזווית שבין האלכסון  $BD'$  לפאה צדדית  $ABB'A'$  היא  $\gamma$ . הבע באמצעות  $m$ ,  $\alpha$  ו- $\gamma$  את נפח התיבה.

## תשובות סופיות:

- (10) א.  $CC' = 4.195$  ס"מ ב.  $AC = 13$  ס"מ ג.  $17.886^\circ$  ד.  $AC' = 13.66$  ס"מ ה.  $V = 251.7$  סמ"ק ו.  $142.63$  סמ"ר  $M =$
- (11)  $\angle AC'B = 30.96^\circ$
- (12) א.  $CC' = 21.44$  ס"מ ב.  $1029.6$  סמ"ק  $V =$ ,  $696.96$  סמ"ר  $P =$
- (13) א.  $9.82$  ס"מ  $AB =$ ,  $10.688$  ס"מ  $BC =$  ב.  $303.5184$  סמ"ר  $M =$ ,  $513.43$  סמ"ר  $P =$
- (14) א.  $10.121$  ס"מ  $AC =$ ,  $11.766$  ס"מ  $AD' =$ ,  $14.227$  ס"מ  $AC' =$  ב.  $34.22^\circ$  ג.  $496$  סמ"ק  $V =$ ,  $284$  סמ"ר  $M =$
- (15) א.  $9$  ס"מ  $BC =$  ב.  $8$  ס"מ  $h =$  ג.  $28.072^\circ$  ד.  $752$  סמ"ר
- (16) א.  $14.42$  ס"מ  $AC =$  ב.  $44.15^\circ$  ג.  $560$  סמ"ר ד.  $752$  סמ"ר
- (17) א.  $8.4$  ס"מ  $BB' =$  ב.  $13.06$  ס"מ  $AD' =$  ג.  $40.03^\circ$
- (18) א.  $9.8$  ס"מ  $AB =$  ב.  $1,167.9$  סמ"ק  $V =$  ג.  $434.4$  סמ"ר
- (19) א.  $15.62$  ס"מ ב.  $12.2$  ס"מ  $h =$  ג.  $776.8$  סמ"ר  $P =$
- (20) א.  $14.42$  ס"מ  $AD' =$  ב.  $17.55$  ס"מ  $B'D =$
- (21)  $\angle D'BD = 25.89^\circ$ ,  $BD' = 16.031$  ס"מ
- (22) א. i.  $a \cos \alpha$  ii.  $a \sin \alpha$  iii.  $a \tan \alpha$  ב.  $53.13^\circ$
- (23) א.  $a\sqrt{7}$  ב.  $70.6^\circ$  ג.  $a = 5$
- (24)  $V = m^3 \sin \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \sqrt{\cos^2 \gamma - \sin^2 \alpha}$

## הקובייה:

### שאלות:



- (25) בקובייה  $ABCD A'B'C'D'$  אורך המקצוע הוא 8 ס"מ. הנקודה  $O$  היא מפגש אלכסוני הבסיס התחתון. מצא את הזווית שבין  $OA'$  לפאה  $ABB'A'$ .



- (26) נתונה קובייה  $ABCD A'B'C'D'$  מעבירים את האלכסון  $A'C'$  בבסיס העליון. מהנקודה  $E$  שעל האלכסון  $A'C'$  מותחים את הקטע  $CE$  השווה באורכו לקטע  $A'E$ . כמו כן מורידים גובה  $EF$  ממישור הבסיס העליון  $A'B'C'D'$  ( $EF$  מאונך ל- $A'C'$ ). הנקודה  $F$  נמצאת על האלכסון הראשי  $A'C$ . נסמן:  $\angle A'CE = \alpha$ ,  $AF = m$ . הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $m$  את נפח הקובייה.

### תשובות סופיות:

(25)  $24.095^\circ$

(26)  $(m \sin 2\alpha \cos \alpha)^3$